KAP 11/12

Goniometrie

YESIT.CZ
MILAN MROCZKOWSKI

Goniometrické výrazy / rovnice / funkce.

Poznámka: Goniometrických funkcí máme 8.

$\sin^2 x \cdot \cos x + \cos^3 x$

$$\begin{aligned}
&\sin^2 x \cdot \cos x + \cos^3 x = \\
&= \cos x\,(\sin^2 x + \cos^2 x) = \\
&= \cos x \cdot 1 = \\
&= \underline{\underline{\cos x}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\sin^2 x + \cos^2 x = 1\\ \cos^2 x + \sin^2 x = 1\end{aligned}}$$

$(1+\sin x)(1-\sin x)$

$$\begin{aligned}
(1+\sin x)(1-\sin x) &= 1 - \sin x + \sin x - (\sin x)^2 = \\
&= 1 - \sin^2 x = \\
&= \underline{\underline{\cos^2 x}}
\end{aligned}$$

TYTO ZÁPISY JSOU EKVIVALENTNÍ $\boxed{(\sin x)^2 = \sin^2 x}$

$\sin x + \cos x \cdot \operatorname{tg} x$

$$\begin{aligned}
&\sin x + \cos x \cdot \operatorname{tg} x = \\
&= \sin x + \cos x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = \\
&= \sin x + \sin x = \\
&= \underline{\underline{2 \sin x}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}}$$

$$\boxed{\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}}$$

$$\operatorname{cotg} x + \frac{\sin x}{1+\cos x}$$

$$\operatorname{cotg} x + \frac{\sin x}{1+\cos x} =$$

$$= \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{1+\cos x} =$$

$$= \frac{\cos x\,(1+\cos x)+\sin x\cdot\sin x}{(\sin x)\cdot(1+\cos x)} =$$

$$= \frac{\cos x+(\cos x)^2+(\sin x)^2}{(\sin x)\cdot(1+\cos x)} =$$

$$= \frac{\cos x+\cos^2 x+\sin^2 x}{(\sin x)\cdot(1+\cos x)} =$$

$$= \frac{\cos x+1}{(\sin x)\cdot(1+\cos x)} =$$

$$= \frac{\cancel{\cos x+1}}{\sin x\cdot(\cancel{\cos x+1})} = \underline{\underline{\frac{1}{\sin x}}}$$

$$2\cos 2x + \sin 2x \cdot \operatorname{tg} x$$

$$2\cos 2x + \sin 2x \cdot \operatorname{tg} x =$$
$$= 2\cos 2x + \sin 2x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} =$$
$$= 2(\cos^2 x - \sin^2 x) + \sin 2x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} =$$
$$= 2(\cos^2 x - \sin^2 x) + 2\sin x \cos x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} =$$
$$= 2\cos^2 x - 2\sin^2 x + 2\sin x \cdot \sin x =$$
$$= 2\cos^2 x - 2\sin^2 x + 2(\sin x)^2 =$$
$$= 2\cos^2 x - 2\sin^2 x + 2\sin^2 x =$$
$$= \underline{\underline{2\cos^2 x}}$$

$$\boxed{\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x}$$

$$\boxed{\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x}$$

$$\cos^4 x - \sin^4 x$$

Poznámka:
$$A^4 - B^4 = (A^2 - B^2)(A^2 + B^2)$$

$$\cos^4 x - \sin^4 x =$$
$$= (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) =$$
$$= \cos 2x \cdot 1 =$$
$$= \underline{\underline{\cos 2x}}$$

Řešte soustavu rovnic:

$$\begin{cases} x + y = \frac{2}{3}\pi \\ \sin x + \sin y = \frac{3}{2} \end{cases}, \text{kde } x, y \in (0; 2\pi)$$

$$\Rightarrow \quad x + y = \frac{2\pi}{3} \quad / -x$$

$$y = \frac{2\pi}{3} - x$$

$$\sin x + \sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) = \frac{3}{2}$$

a počítám atd.

Poznámka:

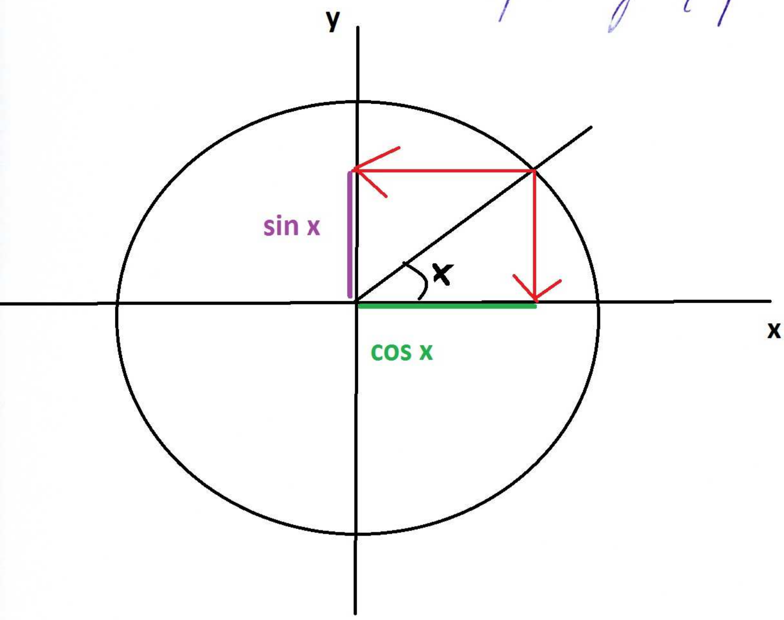
$$\boxed{\cos x = \sqrt{1 - \sin x}}$$

ZADÁNÍ $\boxed{\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}}$

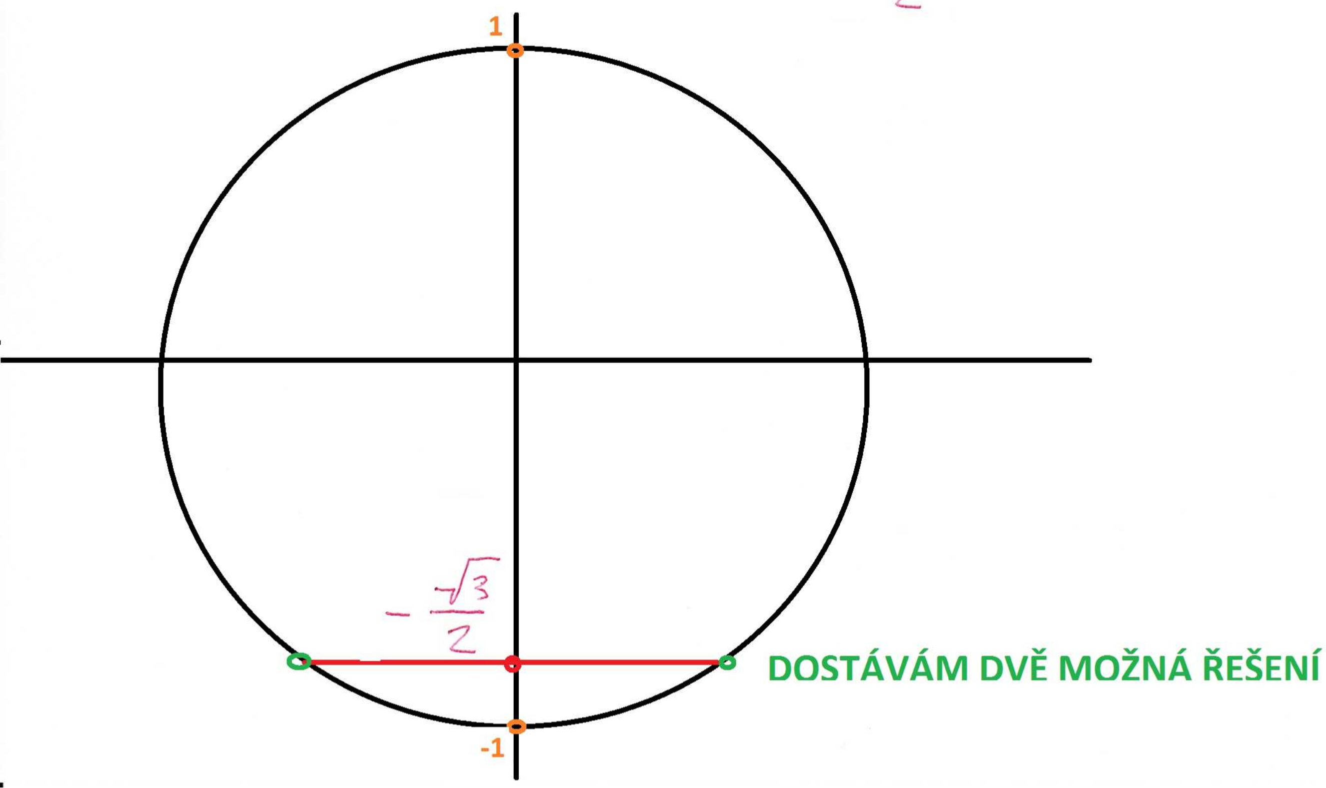
provedu substituci $2x + \frac{\pi}{3} = y$

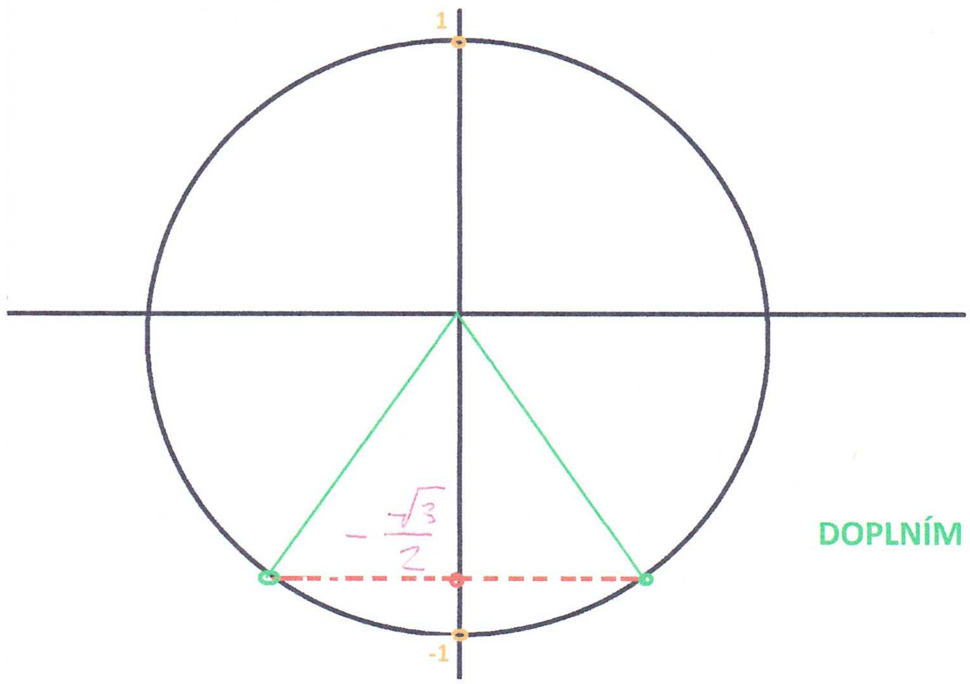
$\sin y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Řeším otázku: Čemu se může rovnat y, jestliže $\sin y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$? Naším cílem je najít všechny hodnoty, které tuto rovnici splňují, proto musím počítat y_1, y_2.



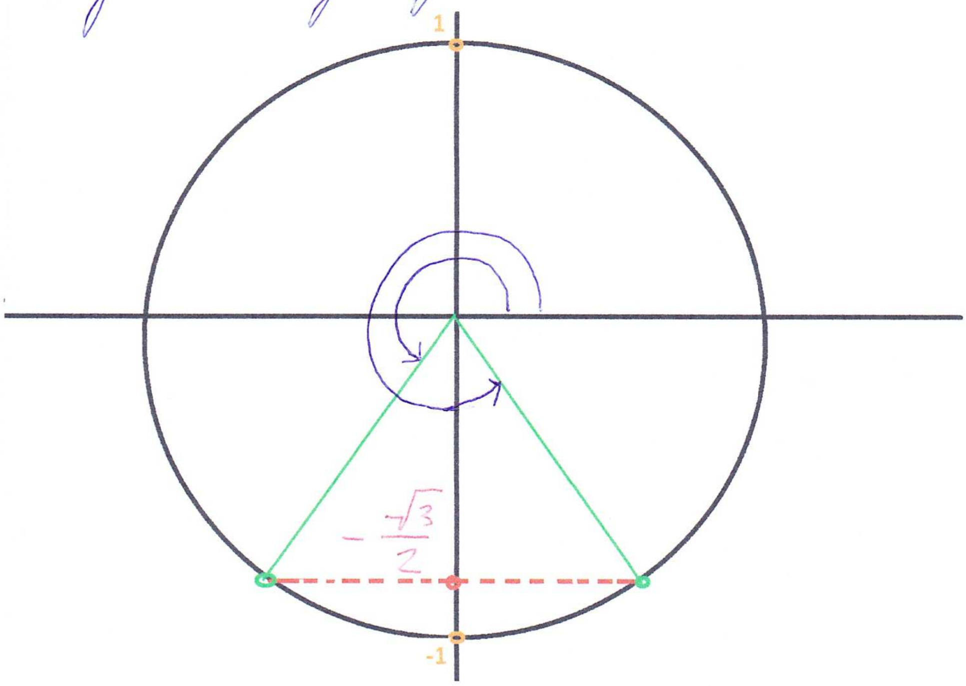
Řeším sinus, která je svisle, nyní na sinusové ose vyznačím: $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

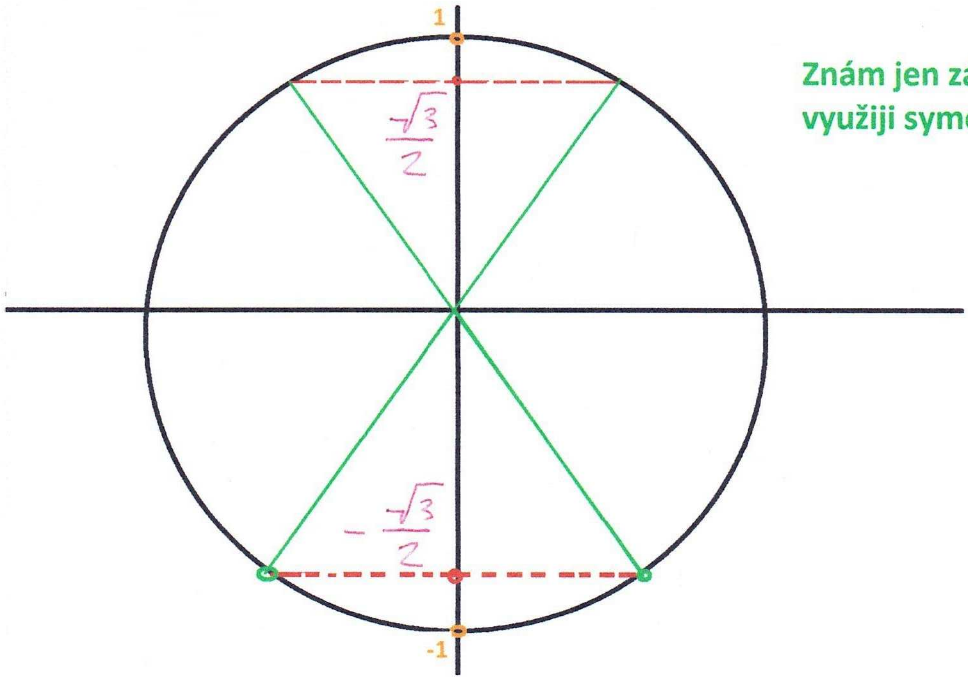




DOPLNÍM

Jaké úhly mne zajímají?





Znám jen základní hodnoty, využiji symetrii.

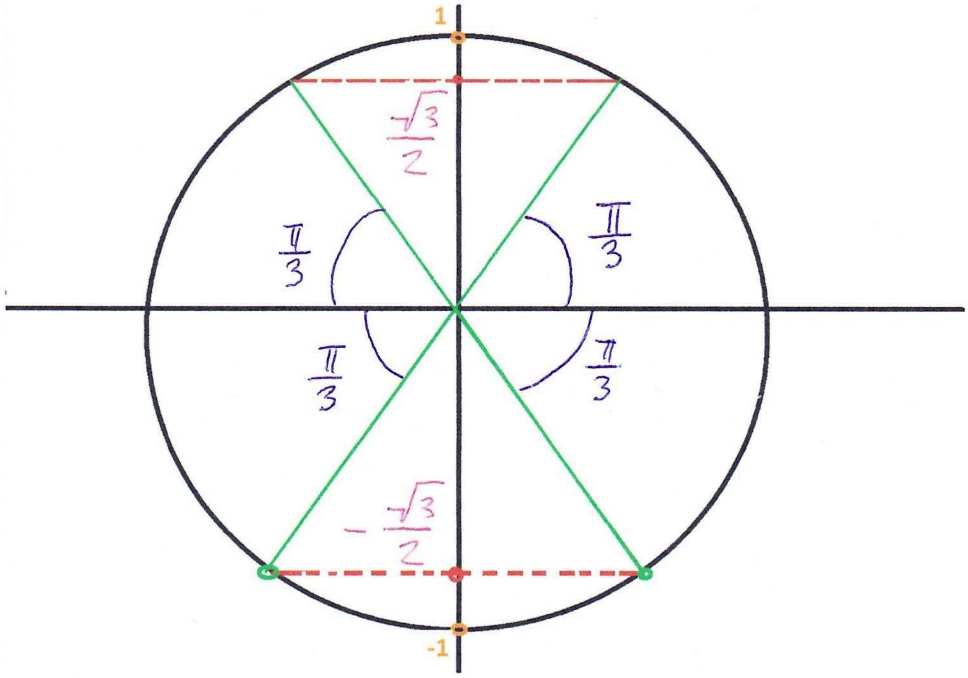
Najdu v tabulce hodnot goniometrických funkcí: sin x = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ abych zjistil úhel.

V tabulce jsem našel $\frac{\pi}{3}$ rad.

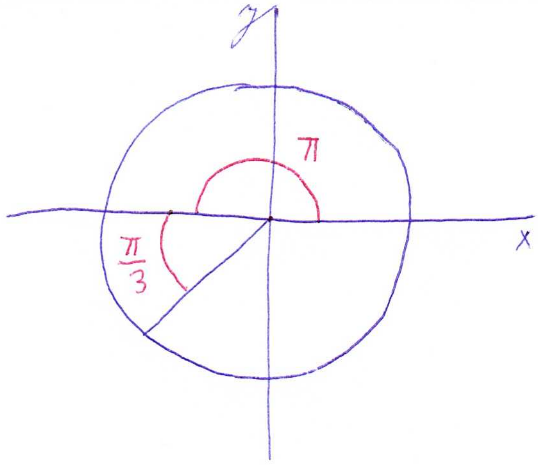
Poznámka:

$\pi = 180^\circ$

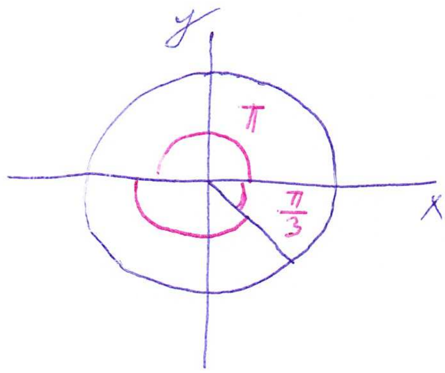
$2\pi = 360^\circ$

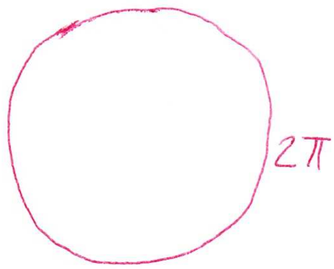


Tedy:



$$y_1 = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{1} + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi + \pi}{3} = \frac{4\pi}{3} = \underline{\frac{4}{3}\pi}$$





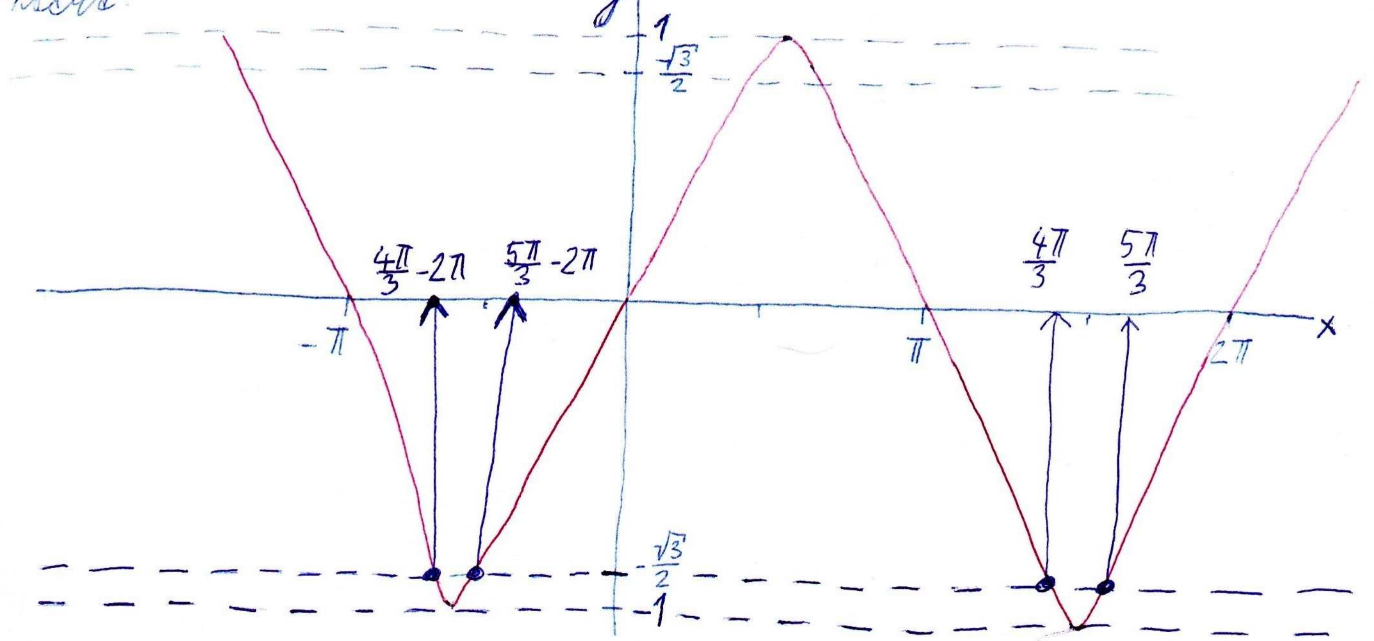
$$y_2 = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{1} - \frac{\pi}{3} = \frac{6\pi - \pi}{3} = \underline{\frac{5}{3}\pi}$$

Vhodný pro:

$$\boxed{\sin\left(\cancel{2}x + \cancel{\tfrac{\pi}{3}}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Pro vyznačení na grafu sinusoidy není třeba převádět na stupně.

Náčrt:



Protože $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ je v zadání, tak body jsou dole pod osou x.

V ZADÁNÍ BYLO: $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

pak provedena substituce $2x+\frac{\pi}{3} = y$

y_1

$$2x_1+\frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} \quad \Big/ -\frac{\pi}{3}$$

$$2x_1 = \frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{3}$$

$$2x_1 = \frac{4\pi-\pi}{3}$$

$$2x_1 = \frac{3\pi}{3}$$

$$2x_1 = \pi \quad /:2$$

$$x_1 = \frac{\pi}{2}$$

y_2

$$2x_2+\frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} \quad \Big/ -\frac{\pi}{3}$$

$$2x_2 = \frac{5\pi}{3} - \frac{\pi}{3}$$

$$2x_2 = \frac{4\pi}{3} \quad /:2$$

$$x_2 = \frac{4\pi}{3}\cdot\frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{4\pi}{6}$$

$$x_2 = \frac{2\pi}{3}$$

$$x_2 = \frac{2}{3}\pi + k\pi$$

Jaká je perioda?

PODÍVÁM SE NA x_1

$$\frac{2\pi \leftarrow \text{VŽDY}}{\text{dosadím za } x}$$

$\Downarrow$

$$\frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

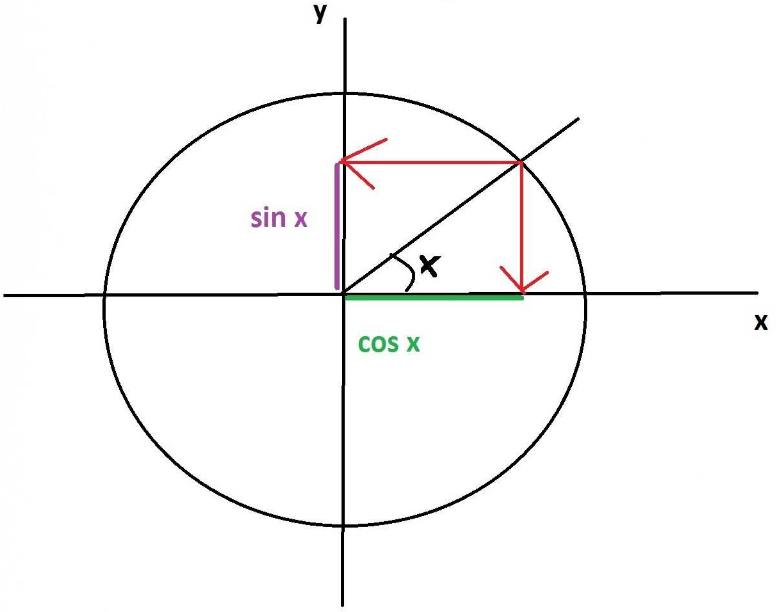
$$K = \left\{\frac{\pi}{2}+k\pi;\ \frac{2}{3}\pi + k\pi\right\}$$

ZADÁNÍ $\boxed{\sin 2x = \frac{1}{2}}$

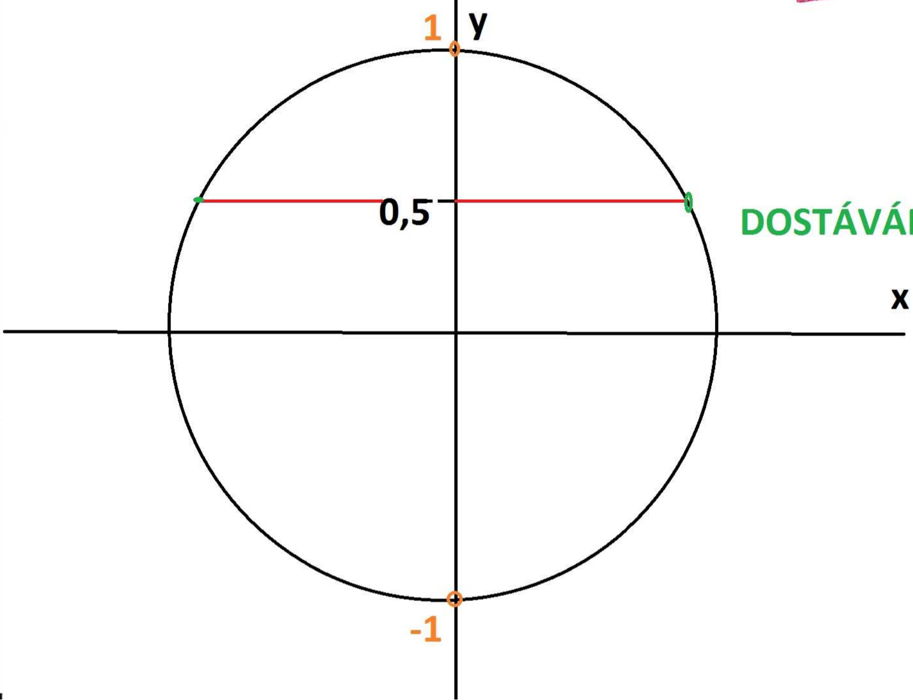
provedu substituci (výraz argumentu se zasubstituje nějakou jinou proměnou, například a.). Mě se líbí y, tak ji použiji.

$$2x = y$$

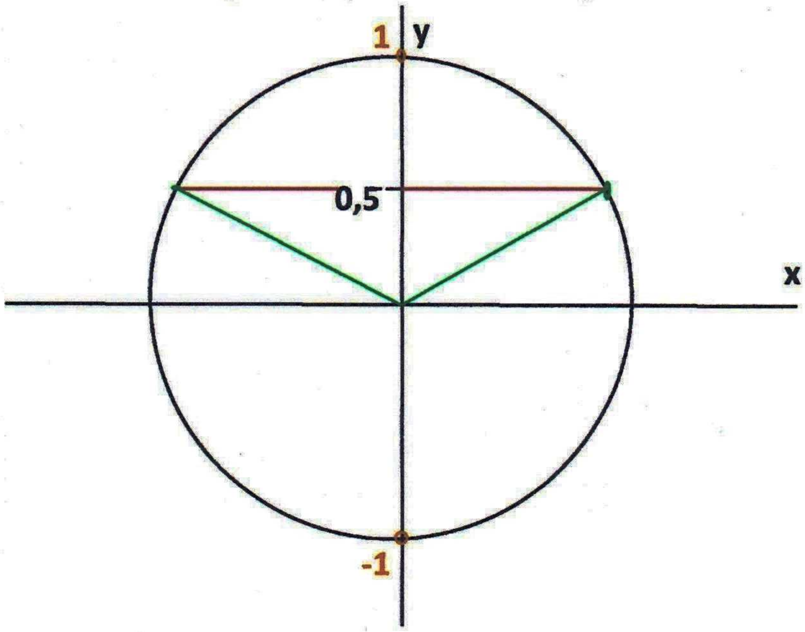
$$\sin y = \frac{1}{2}$$



Řeším sinus, která je svisle, nyní na sinusové ose vyznačím: $\frac{1}{2}$

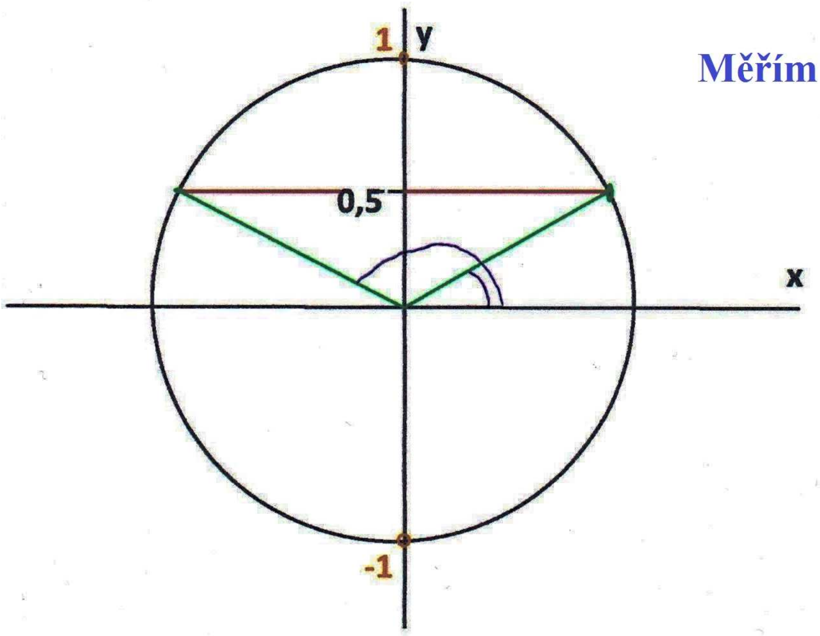


DOSTÁVÁM DVĚ MOŽNÁ ŘEŠENÍ



DOPLNÍM

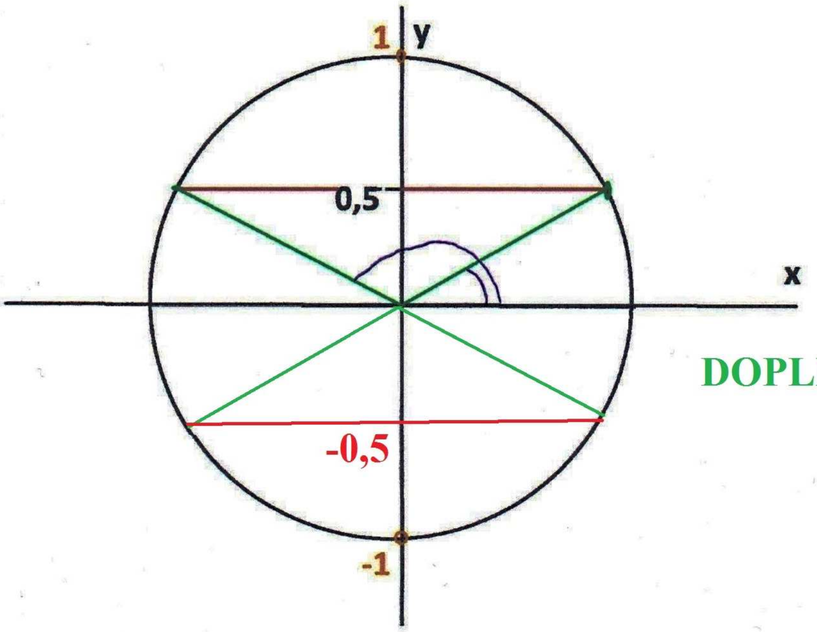
Jaké úhly mne zajímají?



Měřím úhel vždy od osy x.

NÁČRT:

Znám jen základní hodnoty, využiji symetrii.



DOPLNÍM

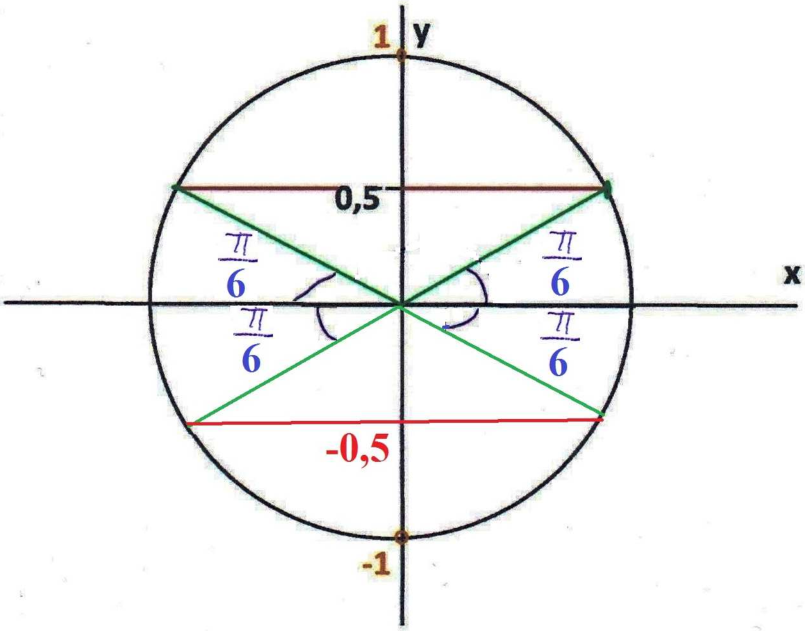
Najdu v tabulce hodnot goniometrických funkcí: sin x = $\frac{1}{2}$ abych zjistil úhel.

V tabulce jsem našel $\frac{\pi}{6}$ rad.

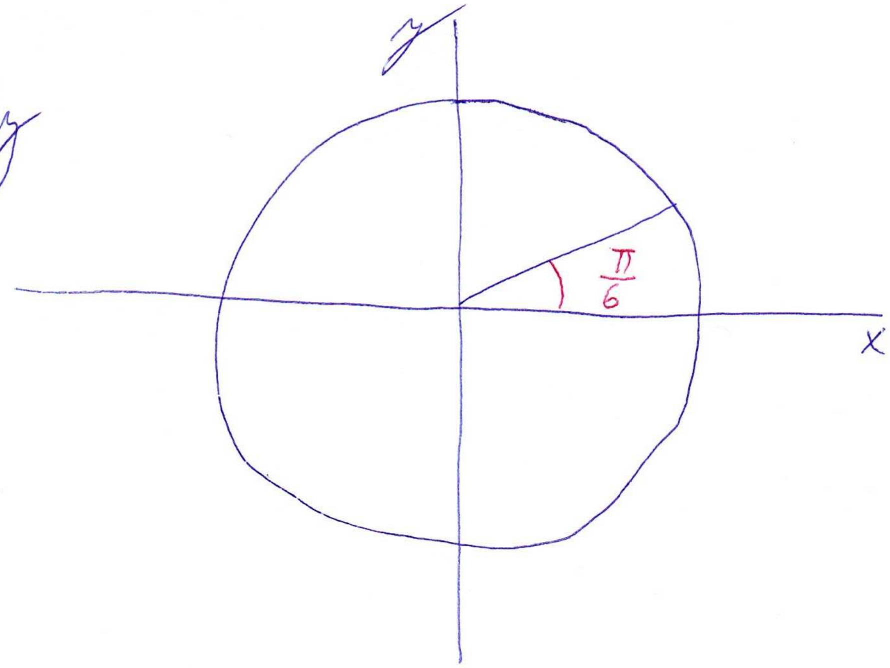
Poznámka:

$\pi = 180°$

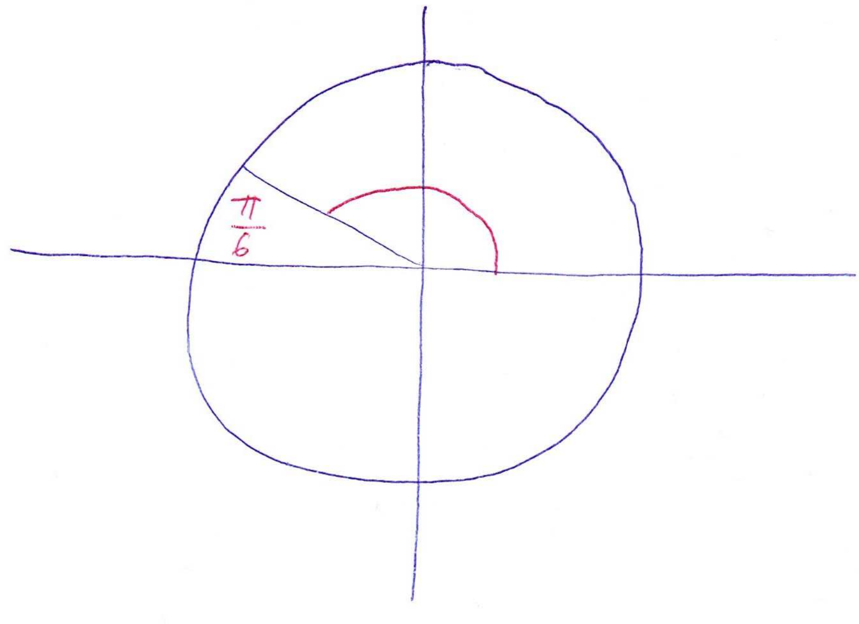
$2\pi = 360°$



Jedy



$$y_1 = \frac{\pi}{6}$$



$$y_2 = \frac{\pi}{1} - \frac{\pi}{6} = \frac{6\pi - \pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$$

V ZADÁNÍ BYLO $\sin 2x = \frac{1}{2}$

pak provedena substituce $2x = y$

$$2x_1 = \overset{y_1}{\frac{\pi}{6}} \qquad\qquad 2x_2 = \overset{y_2}{\frac{5\pi}{6}}$$

$$x_1 = \frac{\pi}{6} \quad /:2 \qquad\qquad x_2 = \frac{5\pi}{6} \quad /:2$$

$$x_1 = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{1}{2} \qquad\qquad x_2 = \frac{5\pi}{6} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\underline{x_1 = \frac{\pi}{12} + k\pi} \qquad\qquad \underline{x_2 = \frac{5\pi}{12} + k\pi}$$

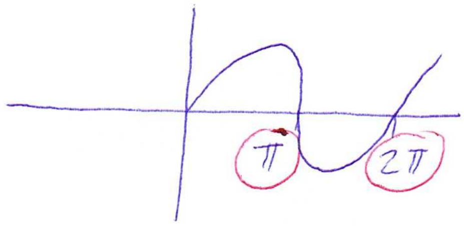
perioda?

$$\frac{2\pi}{2x} = \pi$$

$$\underline{\underline{K = \left\{ \frac{\pi}{12} + k\pi \,;\, \frac{5\pi}{12} + k\pi \right\}}}$$

ZADÁNÍ $\boxed{\sin x = 0}$

KDY $\sin x$ DOSAHUJE NULY ?



JAKOU MÁ PERIODU $\sin x$?

2π PAK SE OPAKUJE

UKAŽ NĚJAKÝ BOD, KDE $\sin x$ SE ROVNÁ NULE

$x = 0$ TO JE JEDNO Z ŘEŠENÍ, ALE ÚPLNĚ SPRÁVNĚ:

(perioda fce)

$$\underline{x = 0 + k \cdot 2\pi}$$

$k \in Z$

(celá čísla)

TABULKA HODNOT GONIOMETRICKÝCH FUNKCÍ

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$ Mak	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
sin(x)	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	0	-1	0
cos(x)	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	-1	0	1
tg(x)	$\frac{\sqrt{0}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{9}}{3} = 1$	$\frac{\sqrt{27}}{3} = \sqrt{3}$	-	0	-	0
cotg(x)	-	$\frac{\sqrt{27}}{3}$	$\frac{\sqrt{9}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{0}}{3}$	-	0	-

Poznámka: - není definováno

$\mathrm{arctg}\, 1 = \frac{\pi}{4}$ $\quad$ $\mathrm{tg}\, \frac{\pi}{4} = 1$

$\mathrm{arctg}\, \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$ $\quad$ $\mathrm{tg}\, \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

$\mathrm{tg}\, x = \sqrt{3}$

$\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\, x) = \mathrm{arctg}(\sqrt{3})$

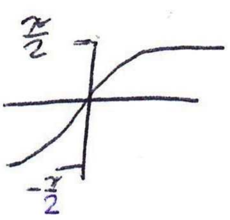
$x = 60°$

Analogické vztahy jsou mezi:

sin - arcsin
cos - arccos
cotg - arccotg
tg - arctg

$$\frac{\sqrt{27}}{3} = \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{9}}{3} = \frac{\sqrt{3}\cdot\cancel{3}}{\cancel{3}} = \sqrt{3}$$

$\mathrm{arctg}\, x = \frac{\pi}{2}$!

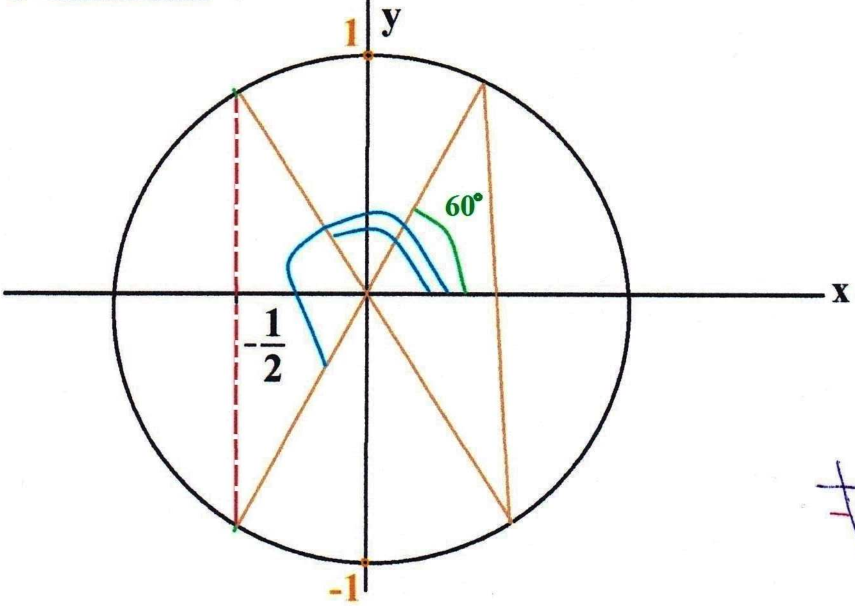


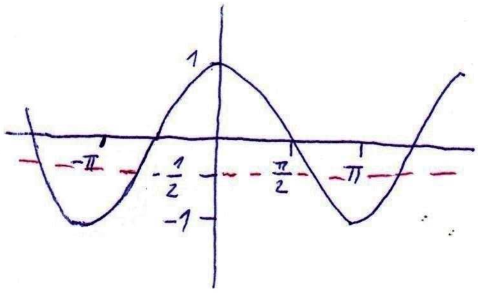
ZADÁNÍ $\boxed{\cos x = -\frac{1}{2}}$

substituce $\quad x = y$

$$\cos y = -\frac{1}{2}$$

ŘEŠÍM <u>COSINUS</u>, KTERÁ JE <u>VODOROVNĚ</u>





V TABULCE JSEM SI NAŠEL $\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{3}$ rad $= 60°$

$$y_1 = \frac{\pi}{1} - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi - \pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$$

$$y_2 = \frac{\pi}{1} + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi + \pi}{3} = \frac{4\pi}{3} \text{ rad}$$

$x_1 = \overset{y_1}{\frac{2\pi}{3}} \quad /:1$ $\qquad\qquad$ $x_2 = \overset{y_2}{\frac{4\pi}{3}} \quad /:1$

$x_1 = \frac{2\pi}{3} + k2\pi$ $\qquad\qquad$ $x_2 = \frac{4\pi}{3} + k2\pi$

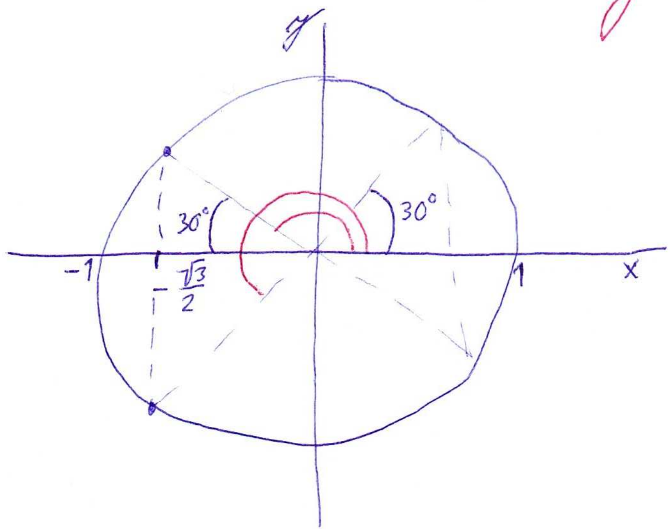
PERIODA: $\frac{2\pi}{1x} = 2\pi$

$$K = \left\{ \frac{2\pi}{3} + k2\pi ; \frac{4\pi}{3} + k2\pi \right\}$$

ZADÁNÍ $\boxed{\cos 6x = -\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$$6x = y$$

$$\cos y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$



V TABULCE NALEZL:

$$\cos y = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{6}$$

$$y_1 = \frac{\pi}{1} - \frac{\pi}{6} = \frac{6\pi - \pi}{6} = \frac{5\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$$

$$y_2 = \frac{\pi}{1} + \frac{\pi}{6} = \frac{6\pi + \pi}{6} = \frac{7\pi}{6} = \frac{7}{6}\pi$$

$$6x_1 = \frac{5}{6}\pi$$

$$x_1 = \frac{\frac{5\pi}{6}}{\frac{6}{1}}$$

$$x_1 = \frac{5\pi}{6} \cdot \frac{1}{6}$$

$$x_1 = \frac{5\pi}{36} + k\frac{\pi}{3}$$

$$6x_2 = \frac{7}{6}\pi$$

$$6x_2 = \frac{7}{6}\pi \quad /:6$$

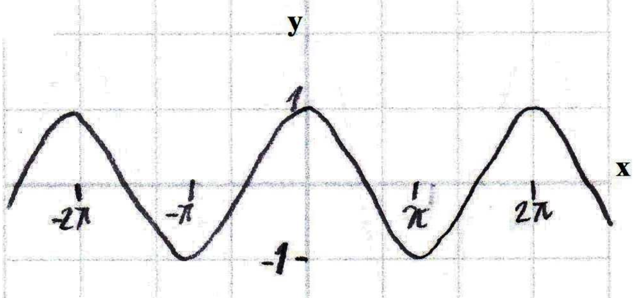
$$x_2 = \frac{7\pi}{6} \cdot \frac{1}{6}$$

$$x_2 = \frac{7\pi}{36} + k\frac{\pi}{3}$$

$$\frac{2\pi}{6x} = \frac{1}{3}\pi$$

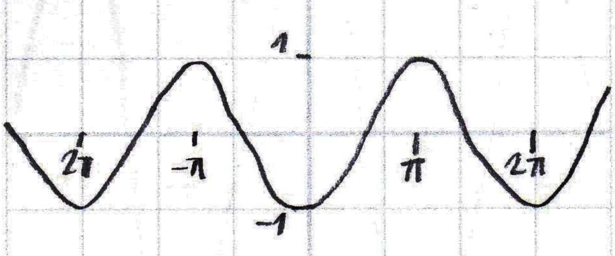
$$K = \left\{ \frac{5}{36}\pi + k\frac{\pi}{3} ; \frac{7}{36}\pi + k\frac{\pi}{3} \right\}$$

$y = \cos x \overset{\text{STEJNÝ}}{=} y = \cos(-x)$ PROTOŽE FUNKCE $\cos x$ je sudá



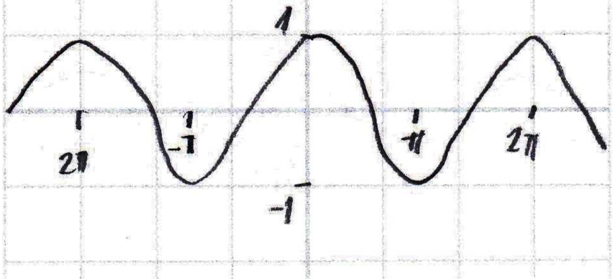
$y = -\cos x$ FUNKCE SE PŘEVRACÍ

PŘEKLÁPÍ
SE PODLE
OSY X



$y = \cos(-x)$

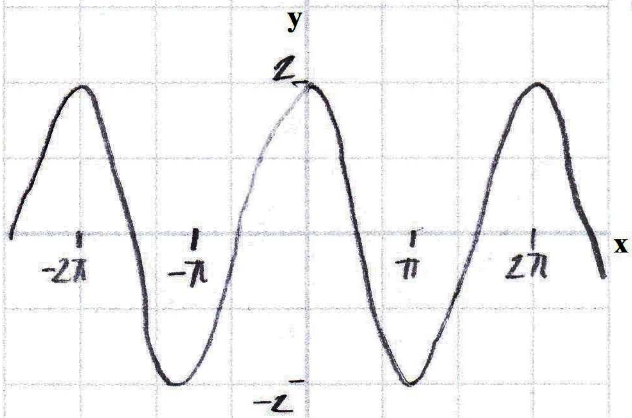
PŘEKLÁPÍ
(PŘEVRÁTÍ)
SE PODLE
OSY Y



FUNKCE VE TVARU

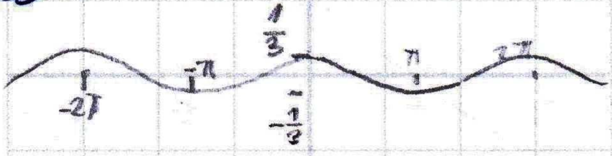
$\boxed{y = a\cos x}$

$y = 2\cdot\cos x$



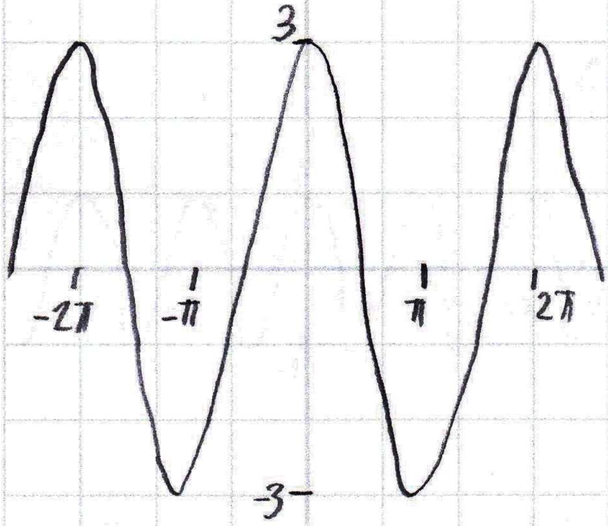
$y = \frac{1}{3}\cos x$

$a>1$, zvětšuje se obor hodnot, průsečíky zůstávají stejné

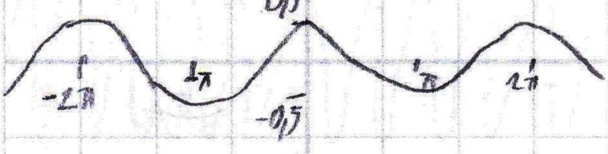


$0<a<1$
maximum a minimum se nám zmenšuje

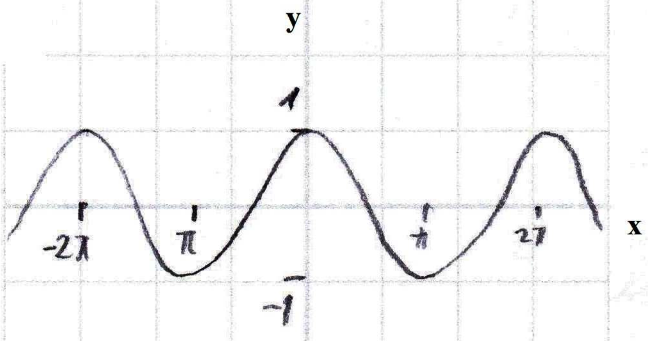
$y = 3\cos x$

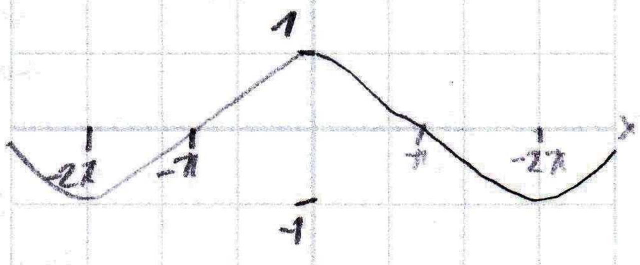


$y = \frac{1}{2}\cdot\cos x$



$y = \cos x$ $\boxed{y = \cos(b\,x)}$ $y = \cos(\frac{1}{2}x)$



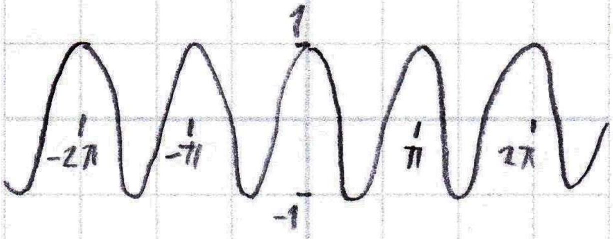


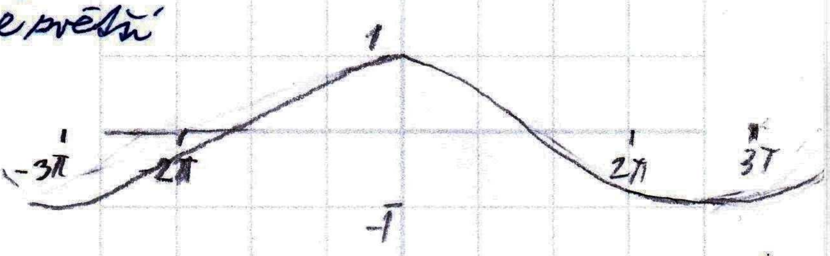
perioda 2π

$y = \cos(2x)$ $b > 1$ frekvence (perioda) se smenší

$0 < b < 1$ perioda se zvětší

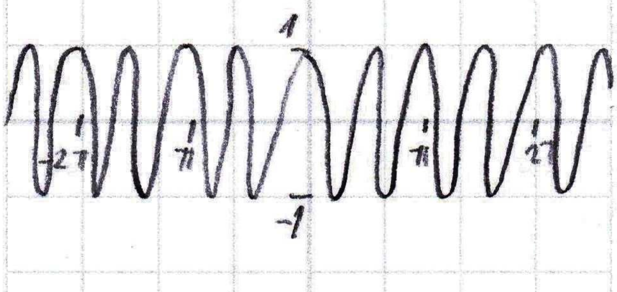
$y = \cos(\frac{1}{3}x)$





perioda π

$y = \cos(3x)$

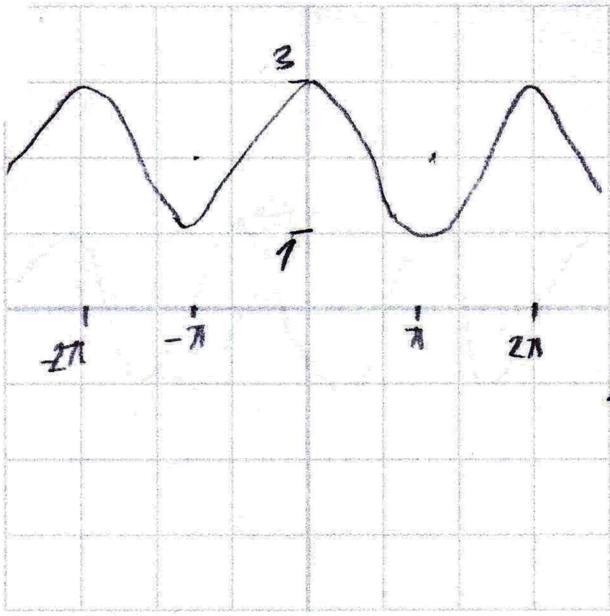


perioda $\frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = \frac{2\pi}{3}$

$y = \cos x + 2$

$\boxed{y = \cos x + c}$

$y = \cos x - 4$



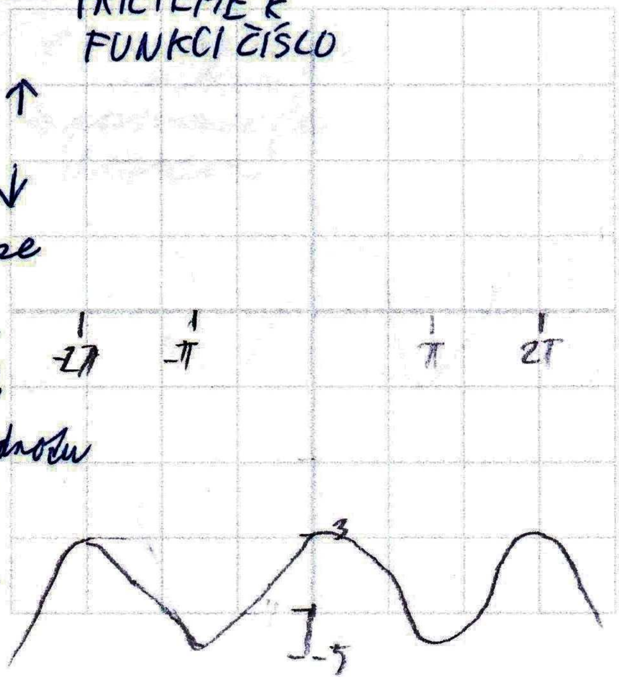
±c

c>0 ↑

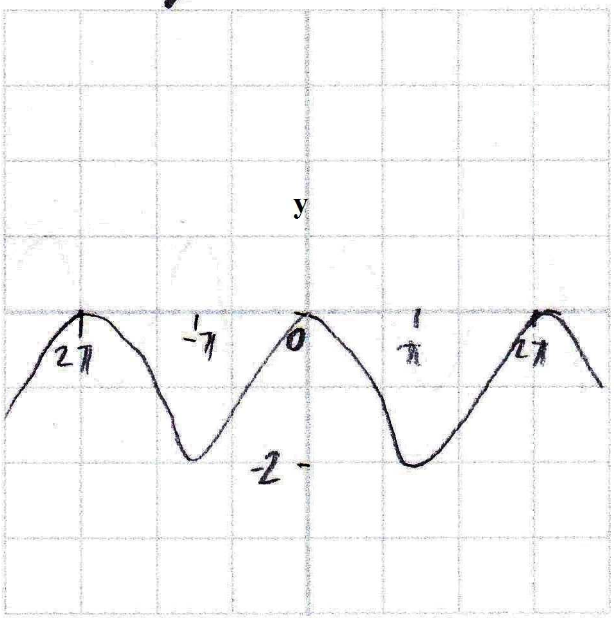
c<0 ↓

mění se nám obor hodnot o tu hodnotu roste nebo klesne

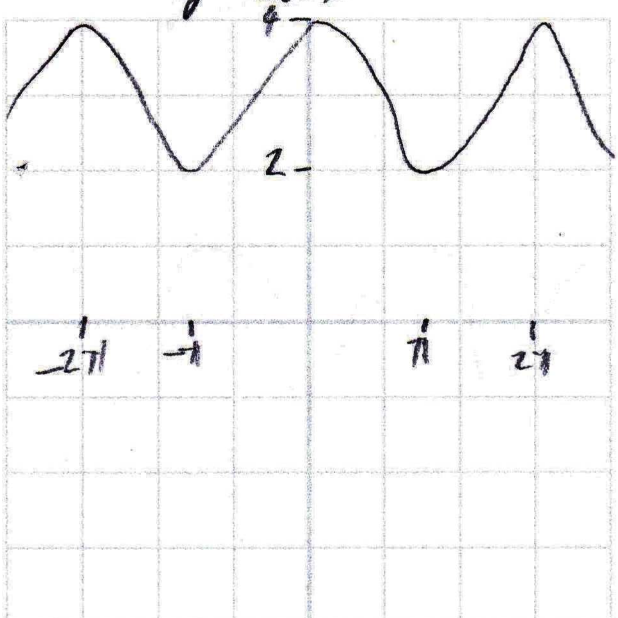
PŘIČTEME K FUNKCI ČÍSLO



$y = \cos x - 1$



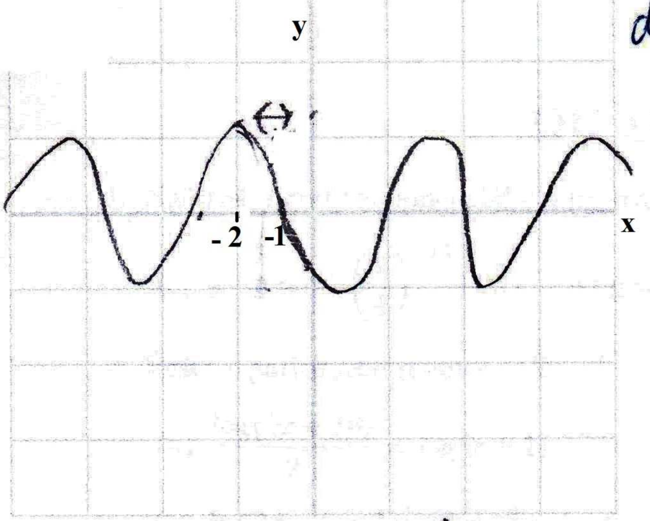
$y = \cos x + 3$



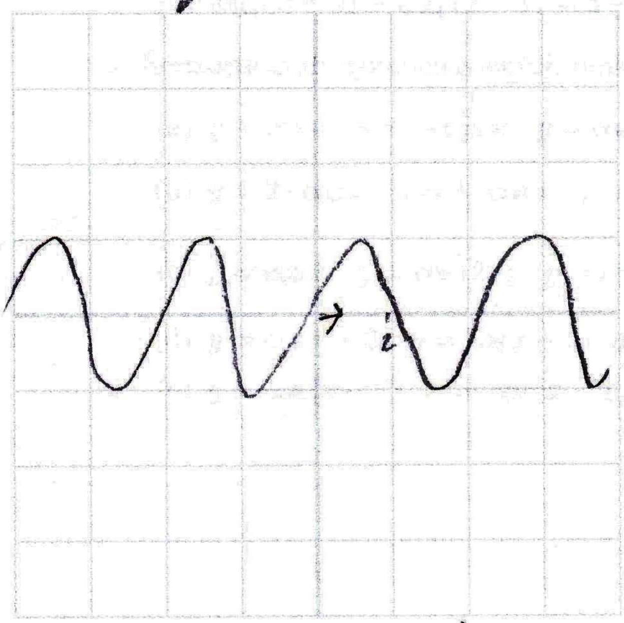
$y = \cos(x+2)$ $\quad$ $y = \cos(x+d)$

$d > 0$ ← posouvá se fce do leva

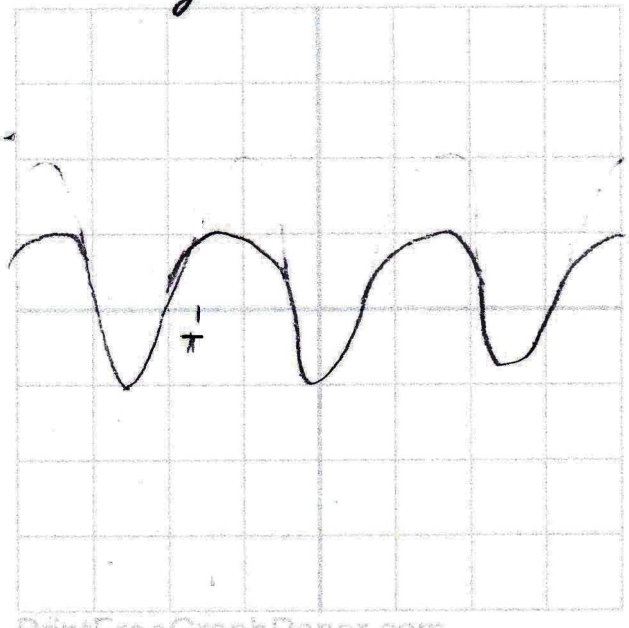
$d < 0$ → posouvá se fce doprava



$y = \cos(x-1)$

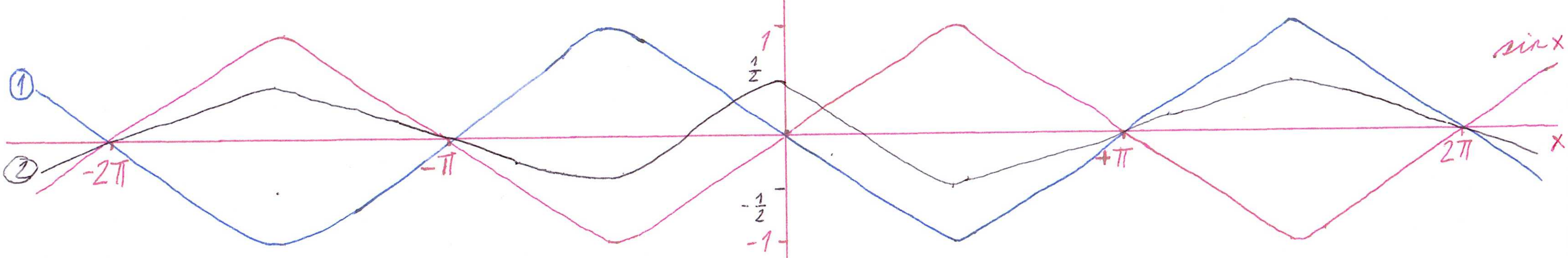


$y = \cos(x+3)$



NARÝSUJ GRAF TÉTO FCE:

$y = \frac{1}{2} \sin\left(-x + \frac{\pi}{3}\right) - 1$



1 $\sin(-x) = -\sin(x)$

PŘEVRACÍ SE PODLE OSY Y

PŘEVRACÍ SE PODLE OSY X

VYPADAJÍ STEJNĚ

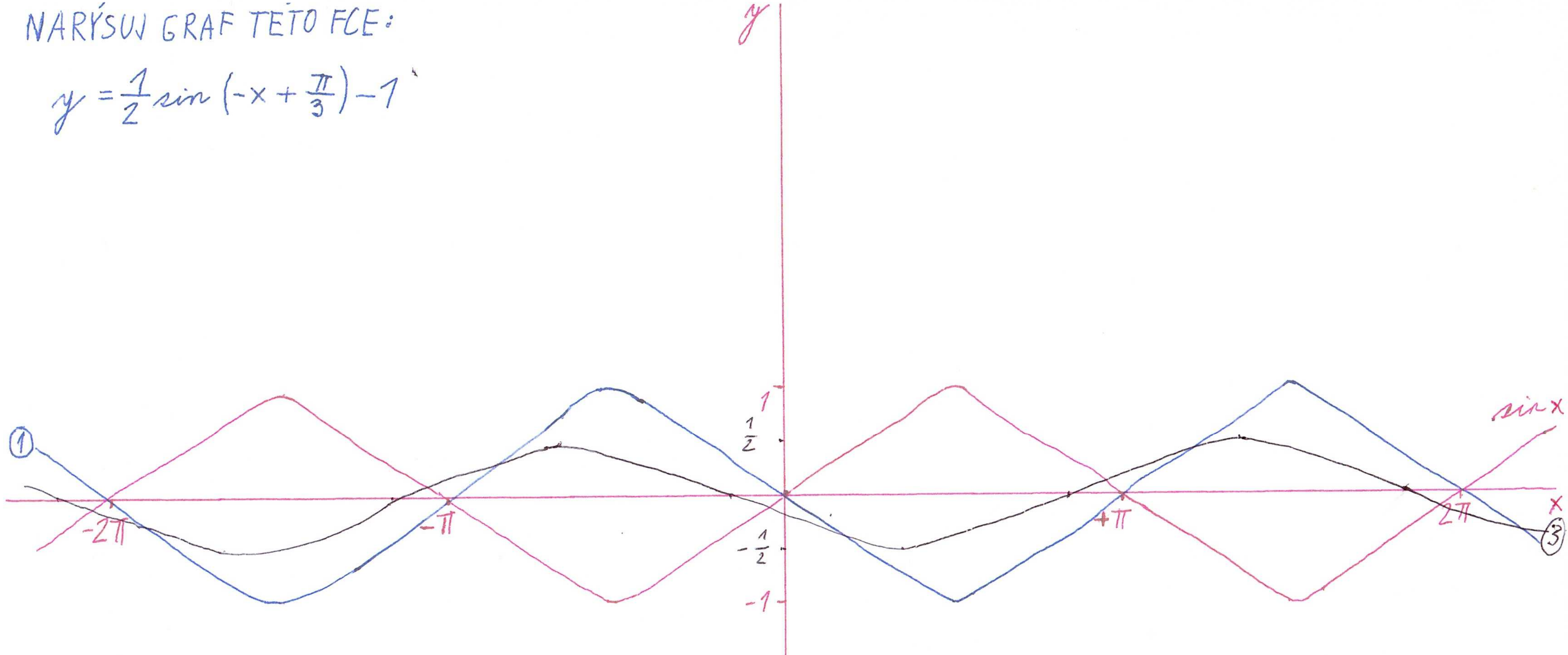
FUNKCE SINUS JE LICHÁ, PROTO PLATÍ $-\sin(x) = \sin(-x)$

2 $y = \frac{1}{2} \sin(-x)$

POUZE SE ZMENŠILO MAXIMUM A MINIMUM NA POLOVINU

NARÝSUJ GRAF TÉTO FCE:

$y = \frac{1}{2} \sin\left(-x + \frac{\pi}{3}\right) - 1$



1 $\sin(-x) = -\sin(x)$

PŘEVRACÍ SE PODLE OSY Y

PŘEVRACÍ SE PODLE OSY X

VYPADAJÍ STEJNĚ

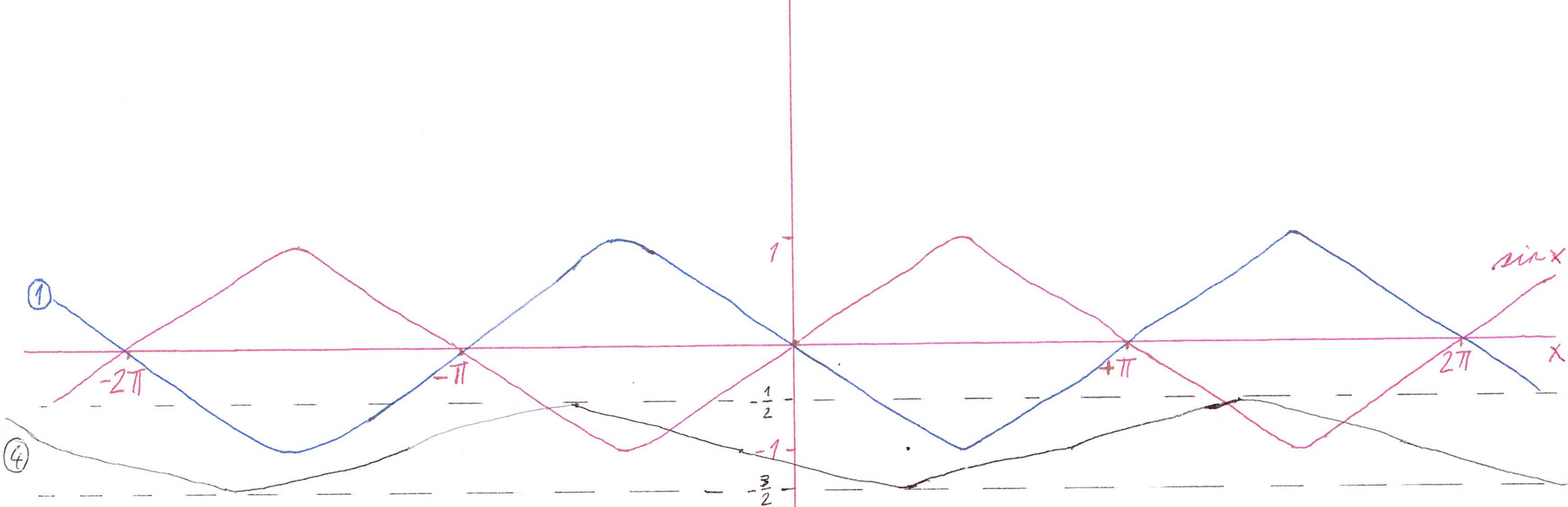
FUNKCE SINUS JE LICHÁ, PROTO PLATÍ $-\sin(x) = \sin(-x)$

3 $y = \frac{1}{2} \sin\left(-x + \frac{\pi}{3}\right)$ $\boxed{y = \sin(x + d)}$

POSUNU DO LEVA PŘIBLIŽNĚ O $\frac{3{,}14}{3}$ = cca 1cm

NARÝSUJ GRAF TÉTO FCE:

$$y = \frac{1}{2} \sin\left(-x + \frac{\pi}{3}\right) - 1$$



1 $\sin(-x) = -\sin(x)$

PŘEVRACÍ SE PODLE OSY Y

PŘEVRACÍ SE PODLE OSY X

VYPADAJÍ STEJNĚ

FUNKCE SINUS JE LICHÁ,

PROTO PLATÍ $-\sin(x) = \sin(-x)$

4 $y = \frac{1}{2} \sin\left(-x + \frac{\pi}{3}\right) - 1$

POSUNU O JEDNIČKU DOLŮ: $-\frac{1}{2} - \frac{1}{1} = \frac{-1-2}{2} = -\frac{3}{2} = -1{,}5$